

ANALISIS KRETERIA *CAUCHY* UNTUK KONVERGENSI BARISAN: STUDI TENTANG KEPERLUAN RUANG METRIK YANG LENGKAP

Deya Reta Renggayoni¹, Irma Aryani², Rahmi³

^{1,2,3}) Program Studi Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu
Pendidikan, Universitas Abulyatama, Jl. Blang Bintang Lama Km 8,5 Lampoh Keude
Aceh Besar, email: irmaaryani_pmtk@abulyatama.ac.id

Abstract: *The Cauchy criterion provides an intrinsic approach to determining the convergence of sequences without explicitly identifying their limits. However, this criterion does not always guarantee convergence when sequences are defined in metric spaces that lack completeness. This study aims to analyze the role of completeness of metric spaces in ensuring the validity of the Cauchy criterion and to examine its extension in generalized metric spaces. The research method employed is a qualitative study using a systematic literature review of classical textbooks and contemporary journal articles related to Cauchy sequences, complete metric spaces, and fixedpoint theory. The analysis shows that in complete metric spaces, every Cauchy sequence is convergent, making the Cauchy criterion a necessary and sufficient condition for convergence (Rudin, 1976; 57–58). In contrast, in incomplete metric spaces, there exist Cauchy sequences that fail to converge within the space. Furthermore, the study finds that in generalized metric spaces, such as b -metric spaces and fuzzy metric spaces, completeness remains a fundamental assumption, often characterized through fixed point theorems (Gregori et al., 2020; 2; Romaguera, 2023; 4). These findings confirm that completeness plays a central role in classical and modern mathematical analysis.*

Keywords : *Cauchy sequence, convergence, metric space, generalized metric space, fixed point theory*

Abstrak: Kriteria Cauchy merupakan pendekatan intrinsik dalam menentukan konvergensi barisan tanpa harus mengetahui titik limit secara eksplisit. Namun, kriteria ini tidak selalu menjamin konvergensi apabila barisan didefinisikan pada ruang metrik yang tidak lengkap. Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis peran kelengkapan ruang metrik dalam menjamin keberlakuan kriteria Cauchy serta mengkaji penerapannya pada ruang metrik tergeneralisasi. Metode penelitian yang digunakan adalah penelitian kualitatif dengan pendekatan studi literatur sistematis terhadap buku teks klasik dan artikel jurnal ilmiah yang relevan dengan barisan Cauchy, ruang metrik lengkap, dan teori titik tetap. Hasil analisis menunjukkan bahwa pada ruang metrik lengkap, setiap barisan Cauchy bersifat konvergen sehingga kriteria Cauchy menjadi syarat perlu dan cukup bagi konvergensi barisan (Rudin, 1976; 57–58). Sebaliknya, pada ruang metrik tidak lengkap, terdapat barisan Cauchy yang tidak konvergen di dalam ruang tersebut. Selain itu, pada ruang metrik tergeneralisasi seperti b -metric space dan fuzzy metric space, konsep kelengkapan tetap menjadi asumsi utama yang sering dikarakterisasi melalui teorema titik tetap (Gregori et al., 2020; 2; Romaguera, 2023; 4). Temuan ini menegaskan pentingnya kelengkapan ruang metrik dalam analisis matematika.

Kata kunci : *barisan Cauchy, konvergensi, ruang metrik, ruang metrik tergeneralisasi, teori titik tetap*

Konvergensi barisan merupakan salah satu konsep fundamental dalam analisis matematika yang menjadi dasar bagi pembahasan limit, kontinuitas, dan kekompakan. Secara klasik, suatu barisan dikatakan konvergen apabila terdapat suatu titik limit yang dapat didekati oleh suku-suku barisan tersebut. Namun, pendekatan ini tidak selalu mudah diterapkan, terutama ketika titik limit belum diketahui secara eksplisit. Oleh karena itu, Cauchy memperkenalkan suatu kriteria konvergensi yang bersifat intrinsik, yaitu dengan meninjau kedekatan antar suku barisan tanpa harus mengetahui limitnya terlebih dahulu (Rudin, 1976; 57). Kriteria ini dikenal sebagai *Cauchy criterion* dan menjadi alat penting dalam analisis real.

Meskipun setiap barisan konvergen pasti merupakan barisan Cauchy, implikasi sebaliknya tidak selalu berlaku pada setiap ruang metrik. Pada ruang metrik yang tidak lengkap, seperti himpunan bilangan rasional, dapat ditemukan barisan Cauchy yang tidak memiliki limit di dalam ruang tersebut. Fenomena ini menunjukkan adanya keterkaitan yang erat antara kriteria Cauchy dan sifat struktural ruang metrik yang digunakan, yaitu kelengkapan ruang metrik. Ruang metrik dikatakan lengkap apabila setiap barisan Cauchy di dalamnya konvergen ke suatu titik yang masih berada di ruang tersebut (Rudin, 1976; 58).

Konsep kelengkapan ruang metrik tidak hanya berperan dalam analisis real klasik, tetapi juga menjadi landasan penting dalam pengembangan teori matematika modern. Berbagai penelitian menunjukkan bahwa dalam ruang metrik tergeneralisasi, seperti *b-metric space* dan *fuzzy metric space*, konsep kelengkapan tetap dipertahankan meskipun dengan karakterisasi yang disesuaikan (Gregori *et al.*, 2020; 2; Romaguera & Tirado, 2020;5). Selain itu, dalam teori titik tetap, khususnya Teorema Titik Tetap Banach, kelengkapan ruang metrik merupakan syarat utama untuk menjamin keberadaan dan ketunggalan solusi (Romaguera, 2023; 4). Hal ini menegaskan bahwa kelengkapan bukan sekadar sifat aksiomatik, melainkan juga memiliki peran metodologis dalam pembuktian matematis.

Berdasarkan uraian tersebut, permasalahan yang dikaji dalam artikel ini adalah bagaimana peran kelengkapan ruang metrik dalam menjamin keberlakuan kriteria Cauchy sebagai syarat konvergensi barisan, serta bagaimana konsep tersebut dipertahankan dalam ruang metrik tergeneralisasi. Tujuan penulisan artikel ini adalah untuk menganalisis secara teoretis hubungan antara barisan Cauchy dan kelengkapan ruang metrik, serta mengkaji

implikasinya dalam pengembangan analisis matematika, khususnya melalui pendekatan teori titik tetap.

KAJIAN PUSTAKA

Barisan dan Konvergensi

Barisan merupakan fungsi dari himpunan bilangan asli ke dalam suatu himpunan bilangan real atau ruang metrik tertentu. Konsep konvergensi barisan menjadi dasar penting dalam analisis real karena berkaitan langsung dengan limit, kontinuitas, dan kekompakan. Suatu barisan dikatakan konvergen apabila terdapat suatu titik limit sehingga jarak antara suku-suku barisan dengan titik tersebut dapat dibuat sekecil mungkin (Rudin, 1976; 56). Definisi ini menekankan keberadaan limit sebagai syarat utama konvergensi, yang dalam praktiknya sering sulit ditentukan secara eksplisit.

Barisan Cauchy

Sebagai alternatif dari definisi konvergensi berbasis limit, Cauchy memperkenalkan konsep barisan yang ditinjau dari kedekatan antar suku barisannya. Suatu barisan disebut barisan Cauchy apabila untuk setiap bilangan positif ϵ , terdapat bilangan asli N sehingga jarak antara dua suku barisan dengan indeks lebih besar dari N selalu lebih kecil dari ϵ (Rudin, 1976; 57). Definisi ini bersifat intrinsik karena tidak melibatkan titik limit secara langsung. Setiap barisan konvergen pasti merupakan barisan Cauchy, namun tidak semua barisan Cauchy bersifat konvergen, terutama pada ruang metrik yang tidak lengkap.

Ruang Metrik dan Kelengkapannya

Ruang metrik merupakan pasangan terurut (X, d) , dengan X adalah suatu himpunan tak kosong dan d adalah fungsi jarak yang memenuhi sifat non-negatif, simetri, dan ketaksamaan segitiga. Kelengkapan ruang metrik didefinisikan sebagai sifat bahwa setiap barisan Cauchy di dalam ruang tersebut memiliki limit yang masih berada di ruang yang sama (Rudin, 1976; 58). Kelengkapan menjadi konsep kunci karena menjamin ekuivalensi antara barisan Cauchy dan barisan konvergen. Kegagalan sifat ini pada ruang metrik tidak lengkap, seperti $\mathbb{Q}$, menunjukkan pentingnya kelengkapan dalam analisis matematika.

Ruang Metrik Tergeneralisasi

Perkembangan penelitian modern memperkenalkan berbagai bentuk generalisasi ruang metrik, seperti *b-metric space* dan *fuzzy metric space*. Pada *b-metric space*,

ketaksamaan segitiga diperlemah dengan melibatkan suatu konstanta tertentu, namun konsep kelengkapan tetap menjadi syarat utama dalam pembahasan konvergensi (Romaguera, 2023; 4). Sementara itu, dalam *fuzzy metric space*, jarak antar elemen dinyatakan dalam derajat keanggotaan, tetapi sifat kelengkapan tetap dipertahankan dengan karakterisasi yang sesuai (Gregori *et al.*, 2020; 2). Hal ini menunjukkan bahwa meskipun struktur ruang berubah, kelengkapan tetap memegang peranan sentral.

Kelengkapan dan Teori Titik Tetap

Keterkaitan antara kelengkapan ruang metrik dan teori titik tetap merupakan salah satu hasil penting dalam analisis matematika. Teorema Titik Tetap Banach menyatakan bahwa pada ruang metrik lengkap, setiap pemetaan kontraktif memiliki titik tetap tunggal. Teorema ini sering digunakan untuk mengkarakterisasi kelengkapan suatu ruang metrik, termasuk dalam ruang metrik tergeneralisasi (Romaguera & Tirado, 2020; 5). Dengan demikian, kelengkapan tidak hanya dipahami sebagai sifat struktural, tetapi juga sebagai alat analitis dalam pembuktian keberadaan solusi.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian kualitatif dengan pendekatan studi literatur yang berfokus pada analisis teoretis kriteria Cauchy dan peran kelengkapan ruang metrik dalam menjamin konvergensi barisan. Bahan utama yang digunakan dalam penelitian ini berupa buku teks analisis matematika klasik serta artikel jurnal ilmiah yang membahas barisan Cauchy, ruang metrik lengkap, dan generalisasi ruang metrik, khususnya dalam konteks teori titik tetap. Buku teks karya Rudin digunakan sebagai rujukan utama untuk konsep dasar barisan, konvergensi, dan ruang metrik lengkap (Rudin, 1976; 56–58), sedangkan artikel jurnal digunakan untuk memperkuat kajian pada ruang metrik tergeneralisasi (Gregori *et al.*, 2020; 2; Romaguera & Tirado, 2020; 5; Romaguera, 2023; 4).

Metode pemecahan permasalahan dilakukan melalui tahapan analisis konseptual yang meliputi identifikasi definisi dan teorema utama, pengkajian hubungan logis antara barisan Cauchy dan konvergensi, serta penelaahan peran kelengkapan ruang metrik dalam berbagai struktur ruang. Setiap konsep dianalisis secara deduktif dengan menelusuri implikasi matematis dari definisi dan teorema yang digunakan, khususnya dalam membandingkan sifat barisan Cauchy pada ruang metrik lengkap dan tidak lengkap (Rudin, 1976; 57).

Metode analisis yang digunakan adalah analisis kualitatif-deskriptif, yaitu dengan mendeskripsikan dan mensintesis hasil-hasil kajian dari berbagai literatur untuk memperoleh pemahaman yang komprehensif mengenai posisi kelengkapan ruang metrik dalam teori konvergensi. Selain itu, analisis dilakukan dengan membandingkan karakterisasi kelengkapan pada ruang metrik klasik dan ruang metrik tergeneralisasi melalui pendekatan teori titik tetap, sebagaimana dikemukakan dalam penelitian-penelitian terkini (Gregori *et al.*, 2020; 3; Romaguera & Tirado, 2020; 6).

Melalui metode ini, diperoleh kerangka analisis yang sistematis untuk menjelaskan bahwa kelengkapan ruang metrik merupakan syarat esensial agar kriteria Cauchy dapat berfungsi secara ekuivalen dengan konvergensi barisan, baik dalam ruang metrik klasik maupun dalam ruang metrik tergeneralisasi.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Analisis Kriteria Cauchy pada Ruang Metrik Lengkap

Hasil kajian menunjukkan bahwa kriteria Cauchy dapat berfungsi secara optimal hanya pada ruang metrik yang memiliki sifat lengkap. Pada ruang metrik lengkap, setiap barisan Cauchy dipastikan memiliki limit yang berada di dalam ruang tersebut, sehingga kriteria Cauchy menjadi syarat perlu dan cukup bagi konvergensi barisan (Rudin, 1976; 57–58). Temuan ini menegaskan bahwa kelengkapan ruang metrik bukan sekadar asumsi tambahan, melainkan syarat struktural yang menentukan keberlakuan kriteria konvergensi intrinsik.

Dalam konteks ini, barisan Cauchy tidak lagi dipandang sebagai konsep yang terpisah dari konvergensi, tetapi sebagai karakterisasi konvergensi itu sendiri. Analisis terhadap definisi dan teorema yang dikemukakan oleh Rudin menunjukkan bahwa tanpa kelengkapan, kriteria Cauchy kehilangan kekuatan analitisnya, karena barisan dapat memenuhi sifat Cauchy tetapi gagal mencapai limit.

Kegagalan Kriteria Cauchy pada Ruang Tidak Lengkap

Pembahasan selanjutnya menunjukkan bahwa pada ruang metrik yang tidak lengkap, seperti himpunan bilangan rasional, terdapat barisan Cauchy yang tidak konvergen di dalam ruang tersebut. Kondisi ini menjadi contoh klasik yang menunjukkan kegagalan implikasi barisan Cauchy menuju konvergensi (Rudin, 1976; 58). Hasil analisis ini memperkuat argumen bahwa kelengkapan ruang metrik merupakan faktor penentu dalam keberhasilan

kriteria Cauchy.

Kegagalan ini juga memberikan justifikasi matematis terhadap kebutuhan perluasan ruang, misalnya melalui proses penyelesaian (*completion*), agar sifat konvergensi dapat dipulihkan. Dengan demikian, konsep kelengkapan berfungsi sebagai jembatan antara sifat lokal barisan dan struktur global ruang metrik.

Kelengkapan dalam Ruang Metrik Tergeneralisasi

Hasil kajian literatur menunjukkan bahwa konsep kelengkapan tetap memiliki peran sentral dalam ruang metrik tergeneralisasi. Pada *b-metric space*, meskipun ketaksamaan segitiga diperlemah, kelengkapan tetap menjadi syarat utama agar barisan Cauchy bersifat konvergen (Romaguera, 2023; 4). Hal ini menunjukkan bahwa generalisasi struktur ruang tidak menghilangkan urgensi kelengkapan, melainkan menuntut karakterisasi yang lebih fleksibel.

Demikian pula pada *fuzzy metric space*, kelengkapan dikaji melalui pendekatan alternatif yang disesuaikan dengan sifat keanggotaan fuzzy. Gregori *et al.* menunjukkan bahwa konsep *strong completeness* tetap diperlukan untuk menjamin keberlakuan hasil-hasil konvergensi (Gregori *et al.*, 2020; 2–3). Dengan demikian, hasil pembahasan ini memperlihatkan konsistensi peran kelengkapan pada berbagai struktur ruang metrik.

Implikasi Kelengkapan dalam Teori Titik Tetap

Pembahasan juga mengungkap bahwa kelengkapan ruang metrik memiliki implikasi langsung dalam teori titik tetap. Teorema Titik Tetap Banach menyatakan bahwa pada ruang metrik lengkap, pemetaan kontraktif memiliki titik tetap tunggal. Beberapa penelitian menunjukkan bahwa teorema ini tidak hanya menggunakan kelengkapan sebagai asumsi, tetapi juga sebagai alat untuk mengkarakterisasi kelengkapan itu sendiri (Romaguera & Tirado, 2020; 5–6).

Hasil ini menunjukkan bahwa kelengkapan ruang metrik tidak hanya berfungsi dalam teori konvergensi barisan, tetapi juga memiliki peran metodologis dalam pembuktian keberadaan solusi pada berbagai permasalahan matematika. Dengan demikian, pembahasan ini menegaskan posisi kelengkapan sebagai konsep kunci dalam analisis matematika klasik maupun modern.

SIMPULAN DAN SARAN

Simpulan

Berdasarkan hasil kajian dan pembahasan yang telah dilakukan, dapat disimpulkan bahwa kriteria Cauchy merupakan pendekatan intrinsik yang efektif dalam menentukan konvergensi barisan, namun keberlakuannya sangat bergantung pada sifat kelengkapan ruang metrik. Pada ruang metrik yang lengkap, setiap barisan Cauchy dipastikan bersifat konvergen, sehingga kriteria Cauchy menjadi syarat perlu dan cukup bagi konvergensi barisan (Rudin, 1976; 57–58).

Hasil kajian juga menunjukkan bahwa pada ruang metrik yang tidak lengkap, kriteria Cauchy tidak dapat menjamin konvergensi barisan, karena terdapat barisan Cauchy yang tidak memiliki limit di dalam ruang tersebut (Rudin, 1976; 58). Temuan ini menegaskan bahwa kelengkapan merupakan sifat struktural yang esensial dalam analisis matematika.

Selain itu, dalam ruang metrik tergeneralisasi seperti *b-metric space* dan *fuzzy metric space*, konsep kelengkapan tetap dipertahankan meskipun dengan karakterisasi yang disesuaikan. Kelengkapan pada ruang-ruang tersebut berperan penting dalam menjamin keberlakuan hasil konvergensi serta penerapan teorema titik tetap (Gregori *et al.*, 2020; 2–3; Romaguera, 2023; 4). Dengan demikian, kelengkapan ruang metrik memiliki peran sentral baik dalam teori konvergensi barisan maupun dalam pengembangan analisis matematika modern.

Saran

Berdasarkan hasil penelitian ini, disarankan agar penelitian selanjutnya mengkaji penerapan konsep kelengkapan ruang metrik dalam konteks pembelajaran analisis real, khususnya dalam membantu mahasiswa memahami hubungan antara barisan Cauchy dan konvergensi secara konseptual (Rudin, 1976; 59).

Selain itu, penelitian lanjutan dapat diarahkan pada eksplorasi lebih mendalam mengenai karakterisasi kelengkapan dalam ruang metrik tergeneralisasi lainnya serta implikasinya dalam teori titik tetap dan pemodelan matematika, sehingga dapat memperluas cakupan aplikasi konsep kelengkapan dalam matematika modern (Romaguera & Tirado, 2020; 6).

DAFTAR KEPUSTAKAAN

- Gregori, V., Miñana, J. J., Roig, B., & Sapena, A. (2020). A characterization of strong completeness in fuzzy metric spaces. *Mathematics*, 8(6), 861.
- Romaguera, S. (2023). An application of wt-distances to characterize complete b metric spaces. *Axioms*, 12(2), 121.
- Romaguera, S., & Tirado, P. (2020). Characterizing complete fuzzy metric spaces via fixed point results. *Mathematics*, 8(2), 273.
- Rudin, W. (1976). *Principles of Mathematical Analysis* (3rd ed.). New York: McGraw-Hill.